

Schwerkraft und *Gravitation*

Heinz Oberhummer, TU Wien

Was ist Masse?

Was sind Schwerkraft und Gravitation?

Wie lauten die Gesetze des freien Falls?

Was ist Kraft und Energie?

Wie wirkt sich der Luftwiderstand beim freien Fall aus?

Wie berechnet man den freien Fall?

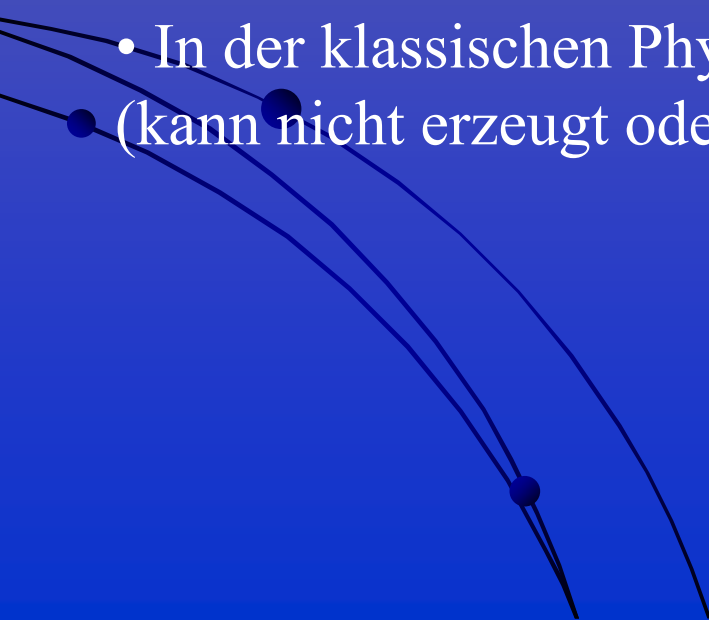
Wie berechnet man Bremskraft und Bremsweg?

Masse

- Grundgröße der Physik
- Einheit im Internationalen Einheitensystem:
1 kg, 1 g = 0,001 kg, 1 Tonne = 1000 kg
- Ursache der Gravitation (Körper mit Massen ziehen sich an):
„schwere Masse“
- Maß für Trägheit eines Körpers (Widerstand gegenüber
Änderungen seines Bewegungszustands): träge Masse
- Experimentell bestätigte Äquivalenz von träger und schwerer
Masse ist Grundlage der klassischen Mechanik
- Masse ist in der klassischen Physik eine Erhaltungsgröße

Masse als Erhaltungsgröße

- Nach der Speziellen Relativitätstheorie (SR) von Albert Einstein (1905) kann allerdings Masse in Energie umgewandelt werden und umgekehrt. In der SR ist allgemeiner nur mehr die Energie inklusive Masse eine Erhaltungsgröße und die Masseerhaltung gilt nur mehr für kleine Geschwindigkeiten.
- In der klassischen Physik ist die Masse eine *Erhaltungsgröße* (kann nicht erzeugt oder vernichtet werden)



Schwere und träge Masse in der klassischen Physik

- Die *schwere Masse* ist die Ursache der Gravitationskraft F für die Anziehung zweier Massen:

$$F = Gm_sM_s/r$$

m_s, M_s ... beteiligte schwere Massen

r ... Abstand der Massen

G ... Gravitationskonstante (Naturkonstante)

Spezialfall der Allgemeinen Relativitätstheorie für Massen mit geringer Dichte

- Die *träge Masse* ist der Proportionalitätsfaktor zwischen Beschleunigungskraft F und Beschleunigung a :

$$F = m_t a$$

Spezialfall der Speziellen Relativitätstheorie für kleine Geschwindigkeiten

Schwere und träge Masse in der klassischen Physik

- Die Äquivalenz von träger und schwerer Masse bedeutet, dass diese gleich sind bis auf einen konstanten Faktor unterscheiden. Ein konstanter Faktor kann immer in der Gravitationskonstante aufgehen und berücksichtigt werden. Äquivalenz bedeutet also, dass die schwere und träge Massen proportional zu der Gravitationskraft bzw. Beschleunigungskraft sind:
- Die *schwere Masse* ist die Ursache der Gravitationskraft F für die Anziehung zweier Massen:
$$F = Gm_sM_s/r$$
- Die *träge Masse* ist der Proportionalitätsfaktor zwischen Beschleunigungskraft F und Beschleunigung a :
$$F = m_t a$$

Kraft

- Kraft erkennt man an ihren Wirkungen:
 - Änderung der Geschwindigkeit oder Richtung eines Körpers
 - Deformation eines Körpers
- Einheit der Kraft: 1 Newton (N) = 1 kg m / s²
- Einheit der Gewichtskraft (veraltet): 1 Kilopond (kp)
Kraft mit der eine Masse 1 kg von der Erde angezogen wird
 - $1 \text{ kp} = 9,81 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$
Also 10 Newton entsprechen dem Gewicht von 1 kg

Energie

- Energie ist die Fähigkeit Arbeit zu leisten
- Es gibt verschiedene Arten von Energie:
 - Bewegungsenergie (kinetische Energie)
 - Energie der Lage (potentielle Energie)
 - Wärmeenergie
 - Deformationsenergie
 - Elektrische und magnetische Energie
 - Bindungsenergie
- Einheit der Energie: $1 \text{ Joule} = 1 \text{ J} = 1 \text{ kg m}^2 / \text{s}^2$

Energieerhaltungssatz

- Energieerhaltungssatz: Energie bleibt bei jedem Prozess stets erhalten.
- Die verschiedenen Energiearten können aber ineinander umgewandelt werden.
- Auch die Masse ist nur eine spezielle Form der Energie und kann in andere Energiearten umgewandelt werden (Albert Einstein, 1905):
$$E = mc^2$$

E ... Energieinhalt der Masse m
c ... Lichtgeschwindigkeit

Ursprung der Masse

- Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik wird die Masse durch den so genannten Higgs-Mechanismus erzeugt. An den Orten von Teilchen wechselwirkt das das gesamte Universum hindurchziehende Higgsfeld mit Teilchen und verleiht so den Teilchen Masse.
- Veranschaulichung des Higgs-Mechanismus:
 - Star auf Party = Masse von Teilchen
 - Gerücht auf Party = Higgs-Teilchen

Ursprung der Masse durch Higgs-Mechanismus



Party ohne Filmstar



Party mit Filmstar


Literatur: Deutsches Elektron-Synchrotron

http://zms.desy.de/e548/e550/e5838/e242/imageobject247/higgs_1_ger.jpg

http://zms.desy.de/e548/e550/e5838/e242/imageobject247/higgs_2_ger.jpg

Zugriff: 21. 3. 2007

Allgemeine Relativitätstheorie (ART)

- Wechselwirkung zwischen Raum und Zeit (besser 4-dimensionale Raumzeit) und Materie. In der ART von Albert Einstein (1916) wird die Gravitation auf die 4-dimensionale Raumzeit zurückgeführt.
 - In der ART beeinflussen Körper mit Masse die Geometrie der vier-dimensionalen Raumzeit und krümmen diesen.
 - Umgekehrt beeinflusst die Krümmung der vier-dimensionalen Raumzeit die Bewegung von Körpern.
- 
- Das Diagramm zeigt zwei gekrümmte Linien, die die Krümmung der vier-dimensionalen Raumzeit darstellen. Die Linien sind von links nach rechts hin abwärts gebogen. Auf der äußeren Kurve sind vier schwarze Punkte markiert, die die Positionen von Körpern zu verschiedenen Zeitpunkten darstellen. Die innerere Kurve verläuft parallel zur äußeren, aber ist stärker gebogen, was die unterschiedliche Krümmung der Raumzeit in der Nähe von Massen verdeutlicht.

Geodäte

- Eine Geodäte (*Pl. Geodäten*) ist die lokal kürzeste Verbindung zweier Punkte.
- In der ART bewegt sich ein Körper entlang einer Geodäte (kürzeste Linie) zwischen zwei Punkten kräftefrei im vier-dimensionalen Raum (Raumzeit).
- Im Euklidschen Raum (Raum ohne Krümmung wie Ebene) ist die Geodäte stets eine Gerade. In gekrümmten Räumen (Raum mit Krümmung wie Kugeloberfläche) ist die Geodäte keine Gerade mehr.
- Die lokal kürzeste Verbindung bedeutet, dass der Weg durch keine kleine Änderung verändert werden kann (z.B. Schatten eines Flugzeugs auf Erdoberfläche, Bewegung der Erde um die Sonne, Jongleur mit Ball).

Schwerkraft (engl. „gravity“)

- Unter der Schwerkraft oder Gewichtskraft G versteht man die Anziehungskraft durch die Gravitation, die auf einen Körper auf der Erdoberfläche wirkt. Sie ist gleich der Masse mal der Erdbeschleunigung:
- $G = mg$
m ... Masse des Körpers
g ... Erdbeschleunigung (Mittel: $9,81 \text{ m/s}^2$; Pole: $9,83 \text{ m/s}^2$; Äquator: $9,78 \text{ m/s}^2$)
- Gewicht auf anderen Himmelskörpern auf eine Masse von 80 kg:
Mond: 13,2 kg
Mars: 30,7 kg
Jupiter: 189 kg
Neutronenstern: 900 Milliarden Tonnen

Freier Fall ohne Luftwiderstand

Freier Fall ist die durch die Erdanziehungskraft bewirkte Bewegung eines Körpers

Freier Fall ohne Luftwiderstand:

Differentialgleichung

Beschleunigungskraft = Erdanziehungskraft

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = mg$$

m ... Masse des Objekts

g ... Erdbeschleunigung

v ... Fallgeschwindigkeit

t ... Fallzeit

h ... Fallhöhe

Lösungen:

$$v = gt; t = v/g$$

$$z = \frac{1}{2} gt^2; t = (2z/g)^{1/2}$$

$$z = \frac{1}{2} v^2/g; v = (2zg)^{1/2}$$

Freier Fall ohne Luftwiderstand

Freier Fall von einem Menschen oder einem Ei aus 15 m Höhe ohne Luftwiderstand:

$z = 15 \text{ m}$... Fallhöhe

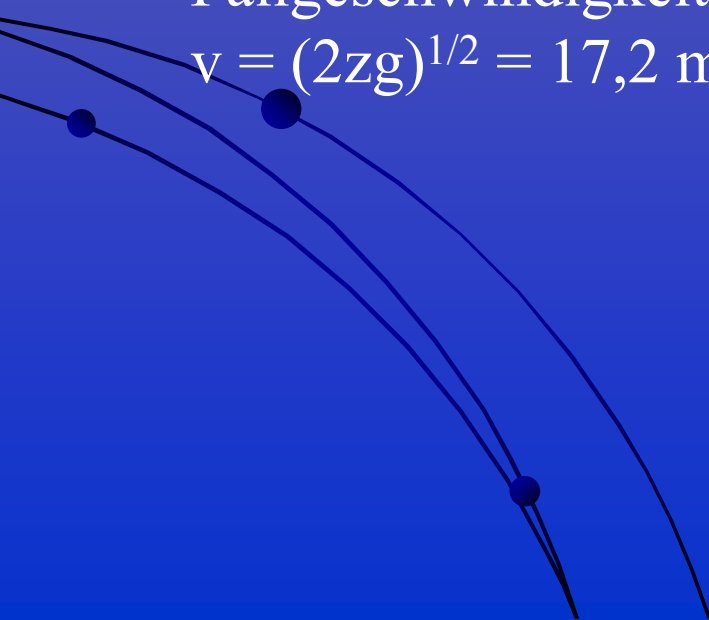
$g = 9,81 \text{ m/s}^2$... Erdbeschleunigung

Fallzeit:

$$t = (2z/g)^{1/2} = 1,75 \text{ s}$$

Fallgeschwindigkeit (am Ende des freien Falls):

$$v = (2zg)^{1/2} = 17,2 \text{ m/s} = 61,8 \text{ km/h}$$



Freier Fall mit Luftwiderstand

Freier Fall mit Luftwiderstand:

Differentialgleichung

Beschleunigungskraft + Luftwiderstand = Erdanziehungskraft

$$m \frac{d^2z}{dt^2} + k \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = m \frac{dv}{dt} + k v^2 = mg$$

m ... Masse des Objekts

g ... Erdbeschleunigung

v ... Fallgeschwindigkeit

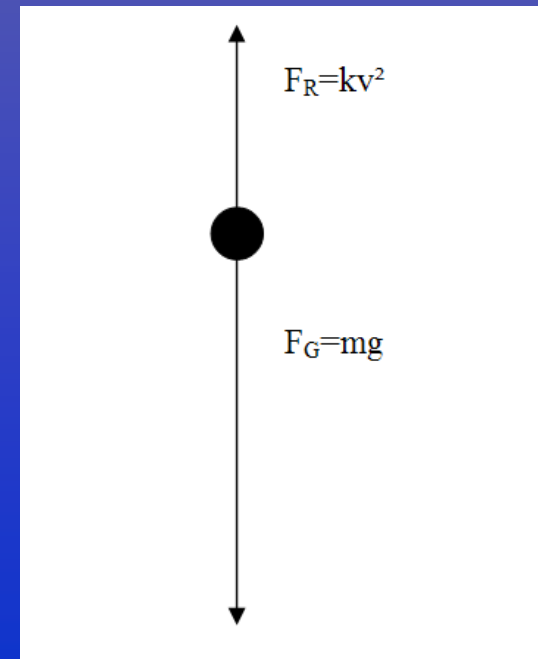
t ... Fallzeit

z ... Fallhöhe

k ... Konstante des Luftwiderstands

F_R ... Luftwiderstand

F_G ... Erdanziehungskraft



Fallgeschwindigkeit mit Luftreibung

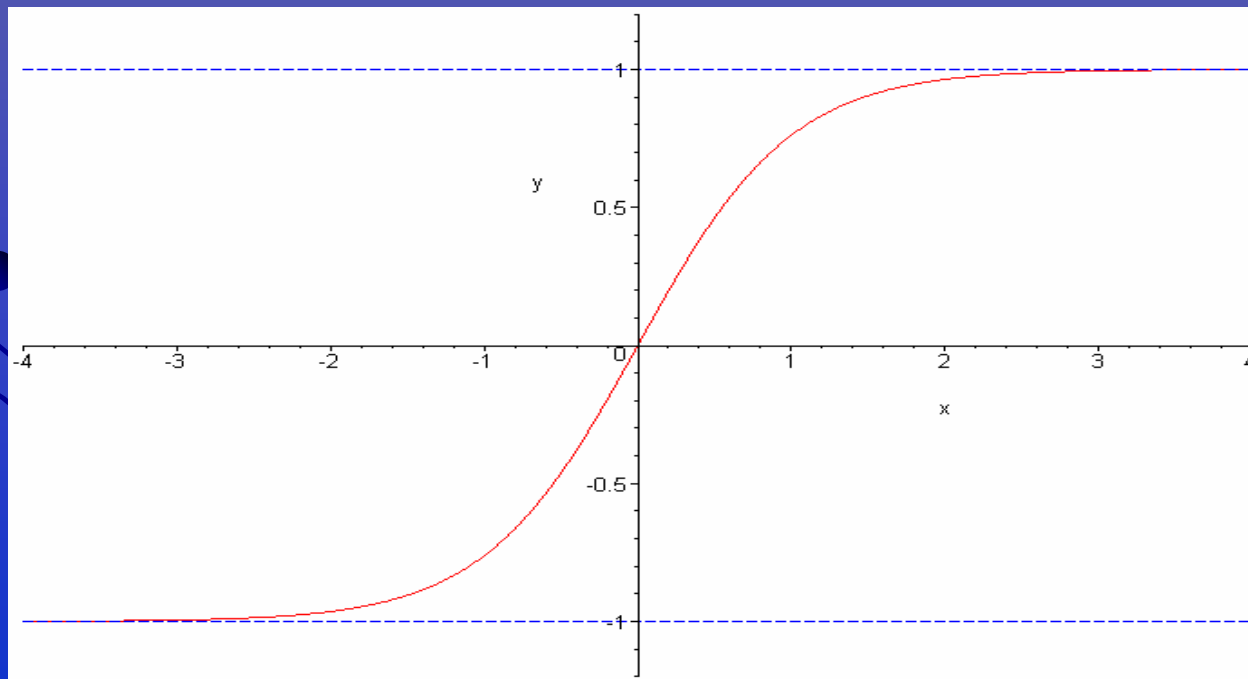
Lösungen der Differentialgleichung

Fallgeschwindigkeit (am Ende des freien Falls):

$$v = (mg/k)^{1/2} \tanh[(kg/m)^{1/2} t] = v_{\text{Max}} [\tanh[(kg/m)^{1/2} t] ,$$

wobei Maximalgeschwindigkeit (nach unendlicher Zeit):

$$v_{\text{Max}} = (mg/k)^{1/2}$$



$$y = \tanh(x)$$

Fallhöhe mit Luftreibung

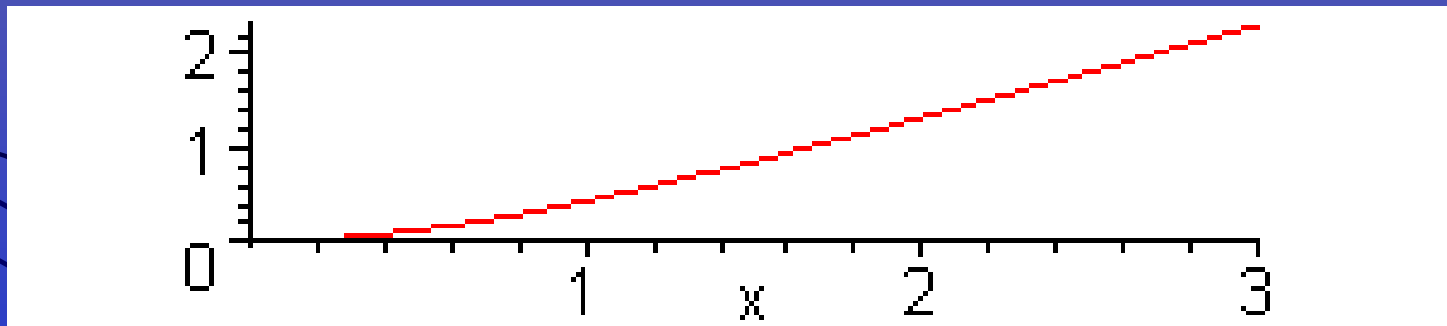
Lösungen der Differentialgleichung:

Fallhöhe:

$$z = m/k \ln \{ \cosh[(kg/m)^{1/2} t] \}$$

Fallzeit:

$$t = [m/(kg)]^{1/2} \operatorname{Arccosh}[\exp(kz/m)]$$



$$y = \ln \cosh (x)$$

Luftwiderstand

Luftwiderstand durch Reibung:

$$F_R = k v^2 = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

Konstante des Luftwiderstands:

$$k = \frac{1}{2} c_w \rho A$$

c_w ... Luftwiderstandsbeiwert (Strömungswiderstandskoeffizient)
abhängig von Form des und Oberflächenbeschaffenheit des Körpers

ρ ... Luftdichte

A ... Horizontale Projektionsfläche

v ... Fallgeschwindigkeit



Typische Luftwiderstandsbeiwerte c_w

Fallschirm: 1,4

Scheibe: 1.1

LkW: 0,8

Mensch, stehend: 0,78

Motorrad, unverkleidet: 0,7

Cabrio offen: 0,5

Motorrad verkleidet. 0,5

Kugel: 0,4

Halbkugel nach unten offen (Fallschirm): 1,42

Halbkugel nach oben offen (Fallschirm): 0,38

PKW: 0,30

Optimal gestaltetes Fahrzeug: 0,20

Tragflügel beim Flugzeug: 0,08

Tropfenform: 0,05

Freier Fall von Mensch kopfüber mit Luftwiderstand

k ... Konstante des Luftwiderstands für Mensch:

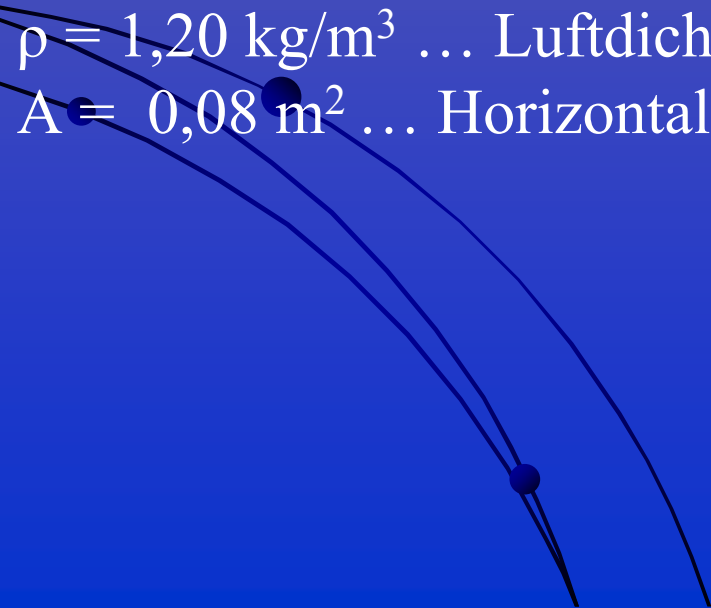
$$F_R = k v^2 = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

$$k = \frac{1}{2} c_w \rho A = 0,0374 \text{ kg/m}$$

$c_w = 0,78$... Luftwiderstandsbeiwert für Mensch

$\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$... Luftdichte

$A = 0,08 \text{ m}^2$... Horizontale Projektionsfläche (20 cm x 40 cm)



Freier Fall von Mensch kopfüber mit Luftwiderstand

$k = 0,0374 \text{ kg/m}$... Konstante des Luftwiderstands

$z = 15 \text{ m}$... Fallhöhe

$m = 80 \text{ kg}$... Masse des Menschen

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$... Erdbeschleunigung

Maximalgeschwindigkeit:

$$v_{\text{Max}} = (mg/k)^{1/2} = 145 \text{ m/s} = 522 \text{ km/h}$$

Endgeschwindigkeit von Mensch in X-Lage: 198 km/h



Freier Fall von Mensch kopfüber mit Luftwiderstand

$k = 0,0374 \text{ kg/m}$... Konstante des Luftwiderstands

$z = 15 \text{ m}$... Fallhöhe

$m = 80 \text{ kg}$... Masse des Menschen

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$... Erdbeschleunigung

Fallzeit:

$$t = (m/k)^{1/2} \operatorname{Arccosh}[\exp(kz/m)] = 1,76 \text{ s}$$

praktisch gleich wie vorher bei freien Fall ohne Luftwiderstand

Fallgeschwindigkeit:

$$v = (mg/k)^{1/2} \tanh[(kg/m)^{1/2} t] = 17,2 \text{ m/s} = 62,3 \text{ km/h}$$

praktisch gleich wie vorher bei freien Fall ohne Luftwiderstand

Maximalgeschwindigkeit:

$$v_{\text{Max}} = (mg/k)^{1/2} = 145 \text{ m/s} = 522 \text{ km/h}$$

Vergleich dazu: Freier Fall in X-Lage: $v_{\text{Max}} = 198 \text{ km/h}$

Physikalische Parameter: Hühnerei

Masse: 62-67 g

Bruchfestigkeit: 20-40 N

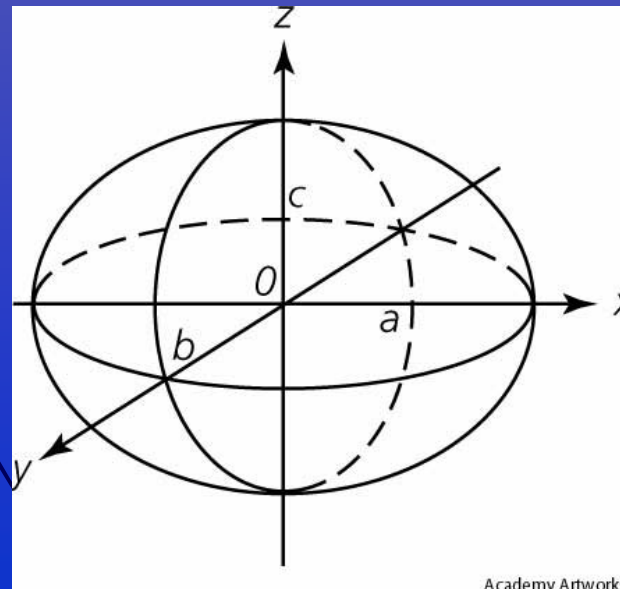
Eierschalendicke: 0,35-0,40 mm

Aus Dissertation: E. Lickteig, Univ. München, 2006, Zugriff: 21. 3. 2007:

http://www2.vetmed.uni-muenchen.de/tierhyg//disspdf/diss2006/Lickteig_Elisabeth.pdf

Form: Ellipsoid mit $a = 5,5 \text{ cm}$; $b = c = 4,5 \text{ cm}$

Abmessung: H. Oberhummer, 21. 3. 2006



Freier Fall von Ei mit Luftwiderstand

k ... Konstante des Luftwiderstands für Hühnerei:

$$F_R = k v^2 = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

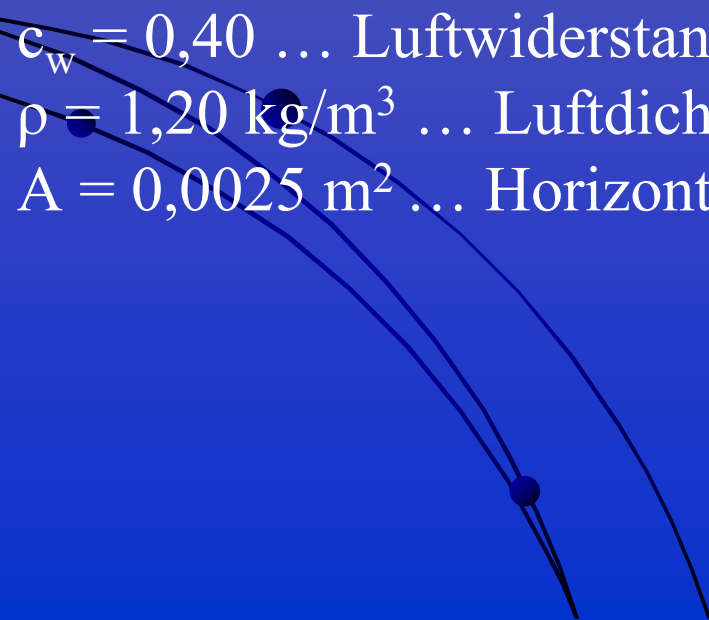
$$k = \frac{1}{2} c_w \rho A = 0,00015 \text{ kg/m}$$

k ... Konstante des Luftwiderstands

$c_w = 0,40$... Luftwiderstandsbeiwert für Kugel

$\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$... Luftdichte

$A = 0,0025 \text{ m}^2$... Horizontale Projektionsfläche



Berechnung von Zahlenwerten

- Alle folgenden Berechnungen der Zahlenwerte können am PC oder Laptop mit
Alle Programme -> Zubehör -> Rechner -> Ansicht wissenschaftlich
berechnet werden.

Dazu:

$$(x)^{1/2} = \text{Inv von } x^2$$

$$\exp(x) = \text{Inv von } \ln(x)$$

$$\text{Aracosh}(x) = \text{Inv und Hyp von } x$$

$$\tanh(x) = \text{Hyp von } \tan(x)$$

Freier Fall von Ei mit Luftwiderstand

$k = 0,00015 \text{ kg/m}$... Konstante des Luftwiderstands

$z = 15 \text{ m}$... Fallhöhe

$m = 0,065 \text{ kg}$... Masse des Eis

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$... Erdbeschleunigung

Fallzeit:

$$t = [m/(kg)]^{1/2} \text{Arccosh}[\exp(kz/m)] = 1,76 \text{ s}$$

praktisch gleich wie vorher bei freien Fall ohne Luftwiderstand

Fallgeschwindigkeit:

$$v = (mg/k)^{1/2} \tanh[(kg/m)^{1/2} t] = 16,9 \text{ m/s} = 60,1 \text{ km/h}$$

praktisch gleich wie vorher bei freien Fall ohne Luftwiderstand

Maximalgeschwindigkeit:

$$v_{\text{Max}} = (mg/k)^{1/2} = 65,2 \text{ m/s} = 235 \text{ km/h}$$

Freier Fall von Ei mit Fallschirm mit Luftwiderstand

k ... Konstante des Luftwiderstands für Hühnerei:

$$F_R = k v^2 = \frac{1}{2} c_w \rho A v^2$$

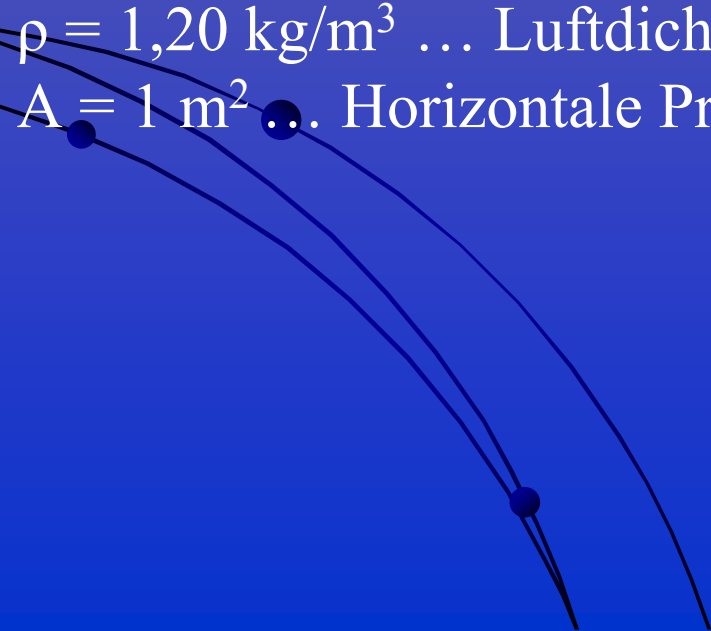
$$k = \frac{1}{2} c_w \rho A = 0,852 \text{ kg/m}$$

k ... Konstante des Luftwiderstands

$c_w = 1,42$... Luftwiderstandsbeiwert von Halbkugel (unten offen)

$\rho = 1,20 \text{ kg/m}^3$... Luftdichte

$A = 1 \text{ m}^2$... Horizontale Projektionsfläche des Fallschirms



Freier Fall von Ei mit Fallschirm mit Luftwiderstand

$k = 0,852 \text{ kg/m}$... Konstante des Luftwiderstands

$z = 15 \text{ m}$... Fallhöhe

$m = 0,2 \text{ kg}$... Masse des Eis (0,065 kg) und Fallschirm (0,135 kg)

$g = 9,81 \text{ m/s}^2$... Erdbeschleunigung

Fallzeit:

$$t = [m/(kg)]^{1/2} \text{Areacosh}[\exp(kz/m)] = 98,2 \text{ s}$$

etwa 56 Mal langsamer als ohne Fallschirm

Fallgeschwindigkeit:

$$v = (mg/k)^{1/2} \tanh[(kg/m)^{1/2} t] = 1,52 \text{ m/s} = 5,74 \text{ km/h}$$

praktisch gleich der Maximalgeschwindigkeit

Maximalgeschwindigkeit:

$$v_{\text{Max}} = (mg/k)^{1/2} = 1,52 \text{ m/s} = 5,74 \text{ km/h}$$

Energieerhaltungssatz

Kinetische Energie = Abbremsenergie

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = F_B s_B$$

Bei freiem Fall ohne Luftwiderstand:

Potentielle Energie = Kinetische Energie = Abbremsenergie

$$mgz = \frac{1}{2} mv^2 = F_B s_B$$

m ... Masse

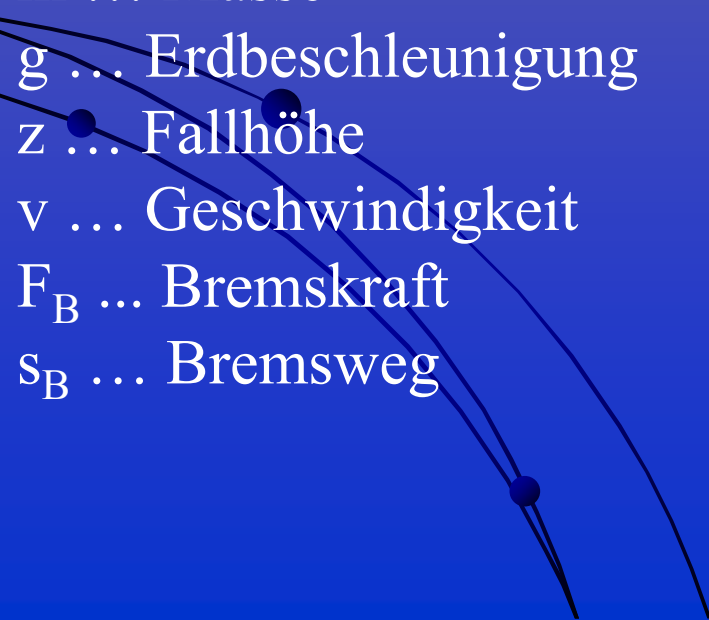
g ... Erdbeschleunigung

z ... Fallhöhe

v ... Geschwindigkeit

F_B ... Bremskraft

s_B ... Bremsweg



Berechnung der Deformation des Eis

Empirisches Ergebnis: Die Schale eines Eis zerbricht, wenn es mindestens 2,5 cm herab fällt. Der Bremsweg ist dann gleich der Deformation des Eis, bei der die Schale gerade zerbricht.

$$z = 0,025 \text{ m}, g = 9,81 \text{ m/s}^2, m = 0,065 \text{ kg}$$

$F_B = 30 \text{ N}$... Bremskraft, bei der die Schale gerade zerbricht

$$v = (2zg)^{1/2} = 0,70 \text{ m/s} = 2,52 \text{ km/h}$$

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = mgz = 0,0159 \text{ J}$$

Kinetische Energie $E =$ Bremsenergie $E_B =$
 $=$ Bremskraft F_B mal Bremsweg s_B :

$$E_B = F_B s_B = 0,0159 \text{ J}$$

Deformation beim Bruch der Schale:

$$s_B = E/F_B = 0,00053 \text{ m} \approx 0,5 \text{ mm}$$

Bei einer Deformation eines Eis von etwa 0,5 mm zerbricht die Schale.

Endformel

Endformel für notwendige Bremskraft bei Erreichen der Maximalgeschwindigkeit:

$$F_B = \frac{1}{2} m v_{\text{Max}}^2 / s_B = \frac{1}{2} m^2 g / (k s_B)$$

⇒ Möglichkeiten um Wirkung der Bremskraft F_B auf das Ei möglichst niedrig zu halten:

1. Masse m verkleinern
2. Konstante des Luftwiderstands $k = \frac{1}{2} c_w \rho A$ vergrößern:
 - a. Luftwiderstandsbeiwert c_w vergrößern
 - b. Luftdichte ρ vergrößern
 - c. Projektionsfläche A vergrößern
3. Bremsweg s_B vergrößern

Endformel

Falls die Maximalgeschwindigkeit beim Aufschlag noch nicht erreicht wurde, ist der Zusammenhang etwas komplizierter:


$$F_B = \frac{1}{2} m v^2 / s_B = \frac{1}{2} m^2 g / (k s_B) \tanh^2[(\text{kg/m})^{1/2} t],$$

$$\text{wobei } t = [m/(\text{kg})]^{1/2} \text{Arccosh}[\exp(kz/m)]$$

Es gilt aber nach wie vor für die Möglichkeiten um Wirkung der Bremskraft F_B auf das Ei möglichst niedrig zu halten:

1. Masse m verkleinern
2. Konstante des Luftwiderstands $k = \frac{1}{2} c_w \rho A$ vergrößern:
 - a. Luftwiderstandsbeiwert c_w vergrößern
 - b. Luftdichte ρ vergrößern
 - c. Projektionsfläche A vergrößern
3. Bremsweg s_B vergrößern

Beispiel: Fallschirmspringen

- Masse: Kleinere Massen fallen langsamer zu Boden
 - Luftwiderstandsbeiwert: Nach unten offener Fallschirm schwebt langsamer zu Boden als nach oben offener Fallschirm
 - Luftdichte: In höher gelegenen Gebieten fällt man schneller
 - Projektionsfläche: Bei größeren Fallschirmen fällt man langsamer
 - Bremsweg: Durch Abrollen bei der Landung eines Fallschirmspringers wird der Bremsweg vergrößert
- 

**Vielen Dank für die
Aufmerksamkeit
und viel Erfolg bei der
„Gravity Challenge“!**

